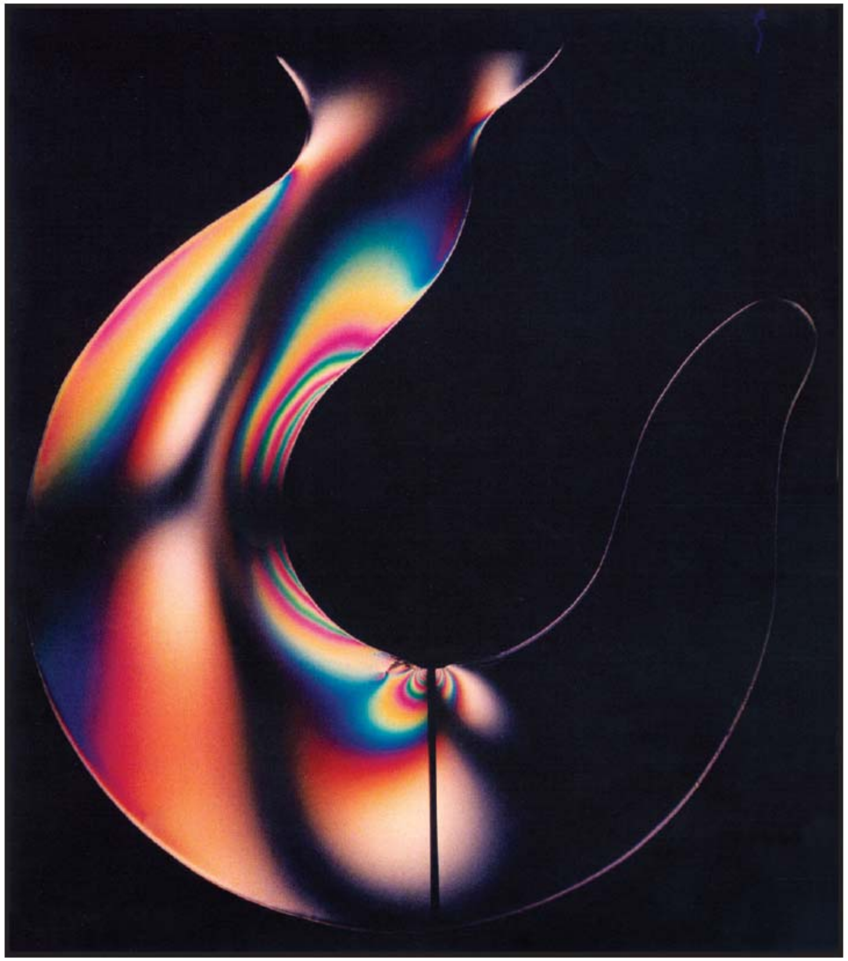
7.3 주응력과 최대 전단응력

(a) 크레인 고리의 사진



(b) 광탄성 줄무늬 그림

$$\begin{cases} \sigma_{x1} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x1y1} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

← 평면 응력의 변환공식

- σ_{x1} , τ_{x1y1} 는 θ 의 변화에 따라 그 값이 변화 (앞의 그래프 참조)

- σ_{x1} 의 최대/최소값 ➔ **주응력** (principal stress)

$$\frac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

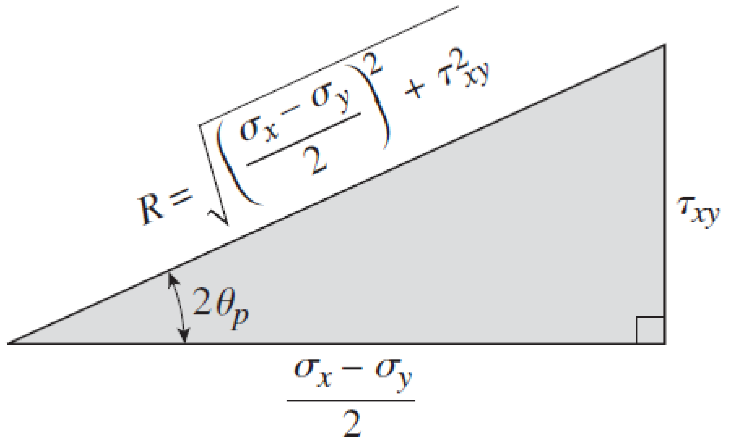
➔ $\tan 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

- $2\theta_p$ 는 0^o ~ 360^o 사이에 두 개의 값을 가짐 (두 값은 180^o 차이)

- 따라서 θ_p 는 0^o ~ 180^o 사이에 두 개의 값을 가짐 (두 값은 90^o 차이)

  ➔ 두 값은 주각 (Principal Angles), 서로 직교하는 축을 구성 ➔ 주축

- 주축 방향으로 σ_{x1} , σ_{y1} 이 최대/최소 값을 가지게 됨. ➔ 주응력 (Principal Stress)



– 좌측의 그림에서 $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

➔ $\cos 2\theta_p = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$, $\sin 2\theta_p = \dfrac{\tau_{xy}}{R}$

⟵ 주각 (Principal Angles)

이 값들을 응력변환 공식에 대입하여 주응력 σ_1 을 구하면,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\tau_{xy}}{R}\right) \\
&= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}
\end{aligned}$$

- 또 다른 주응력 σ_2는 $\theta_p = \theta_p + 90$에 해당하는 값을 구하여도 되며,

  또 다른 방법으로 $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$ 을 사용하는 것이 더욱 편리함.

$$\sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_1$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

주응력 구하는 일반식 ➔ $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

◆ 주각

$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}, \quad \sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

◆ 주평면에서의 전단응력

– 주평면에서의 전단응력은 τ_{x1y1} 의 계산식에 $2\theta_p$ 에서의 삼각함수 값을 대입하여 구함.

$\rightarrow$ $\tau_{x1y1} = 0$ $\leftarrow$ 이 식은 $\dfrac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = 2\underbrace{\left(-\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \right)}_{\tau_{x1y1}} = 0$ 과 동일함

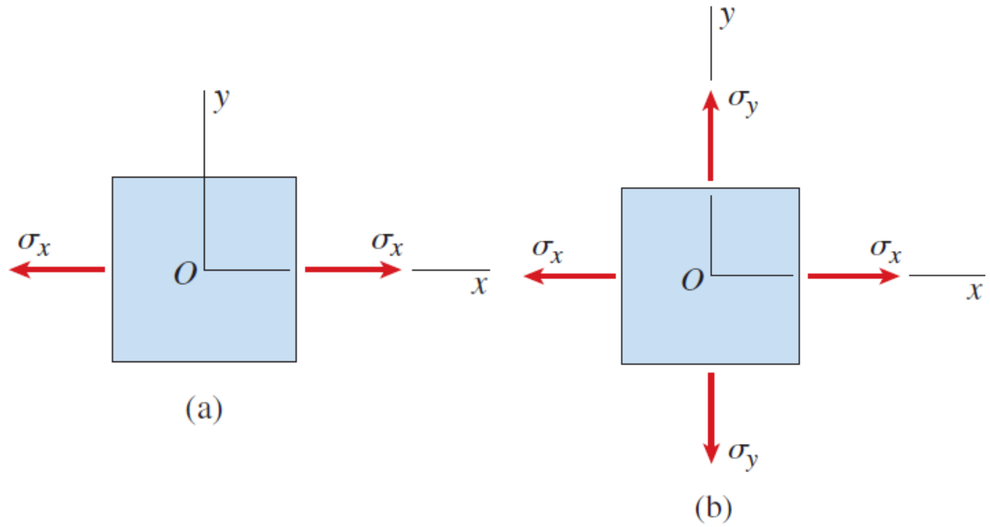
– 주평면에서 전단응력 = 0

◆ 특별한 경우

단축 응력 & 2 축 응력의 경우

➔ $\tan 2\theta_p = 0$

➔ $x - y$ 평면이 주평면.



순수 전단

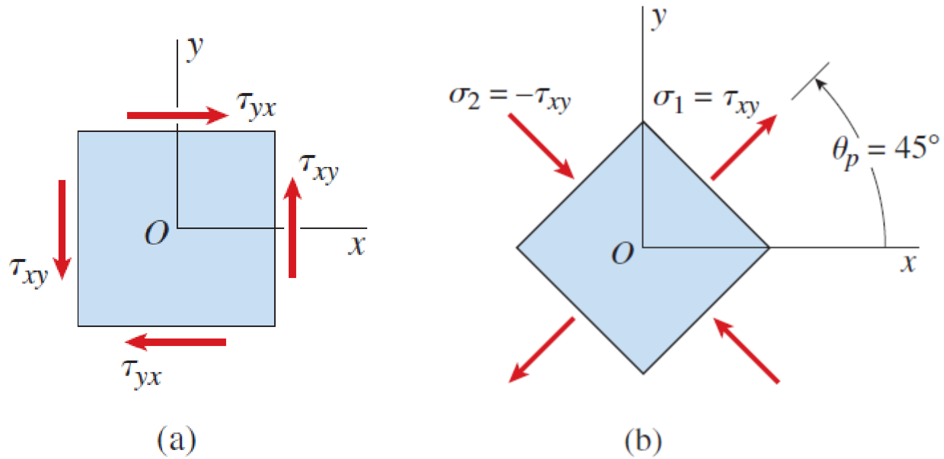
이 경우 주평면은

➔ $\tan 2\theta_p = \infty$

➔ $\theta_p = 45^o,\ 135^o$

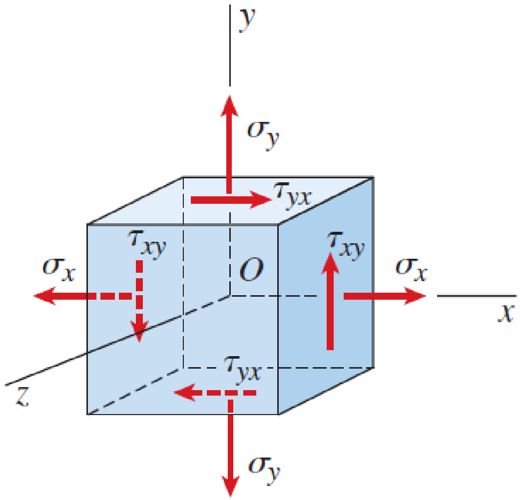
주응력의 값은

$\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xy}$

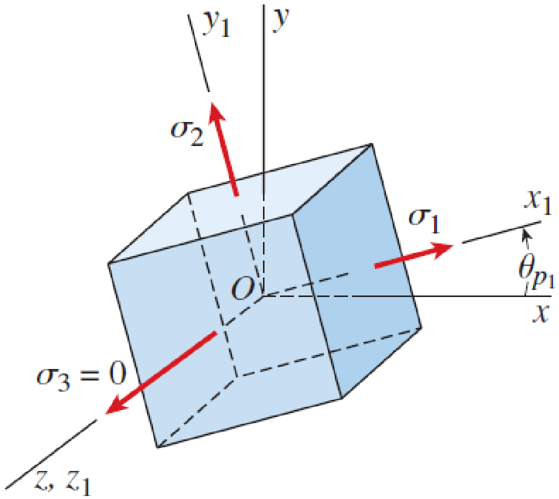


세번째 주응력

- 지금까지는 z 축 회전만 고려
- 실제는 $\sigma_3(\neq 0)$ 이 존재
- 3 차원 해석 필요
- σ_3 의 크기에 따라 3 차원 주응력의 해석이 달라짐.



(a)



(b)

◆ 최대전단응력

– 최대 전단응력을 구하기 위하여 τ_{x1y1}의 식을 θ에 대하여 미분한다.

$$\frac{d\tau_{x1y1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

따라서 $\tan 2\theta_s = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

– $2\theta_s$는 0^o □ 360^o 사이에 두 개의 값을 가짐 (두 값은 180^o 차이)

– 따라서 θ_s는 0^o □ 180^o 사이에 두 개의 값을 가짐 (두 값은 90^o 차이)

– 최대 전단은 직교하는 두 평면상에서 발생.

한편 $\tan 2\theta_s = -\dfrac{1}{\tan 2\theta_p} = -\cot 2\theta_p$ ➔ $2\theta_s$와 $2\theta_p$는 서로 수직 ➔ θ_s와 θ_p는 서로 45^o

확인: $\dfrac{\sin 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} + \dfrac{\cos 2\theta_p}{\sin 2\theta_p} = 0$ ➔ $\sin 2\theta_s \sin 2\theta_p + \cos 2\theta_s \cos 2\theta_p = 0$ ➔ $\cos(2\theta_s - 2\theta_p) = 0$

➔ $2\theta_s - 2\theta_p = \pm 90^o$ ➔ $\theta_s = \theta_p \pm 45^o$

➔ 최대 전단응력 평면은 주 평면에서 $\pm 45^o$ 의 위치에서 발생함.

이때 최대 양의 전단응력 $\tau_{\max}$ 의 평면에서

$$\Rightarrow \cos 2\theta_{s1} = \frac{\tau_{xy}}{R}, \quad \sin 2\theta_{s1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \Rightarrow \theta_{s1} = \theta_{p1} - 45^o$$

이 값을 대입하여 $\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, 그리고 $\tau_{\min} = -\tau_{\max}$

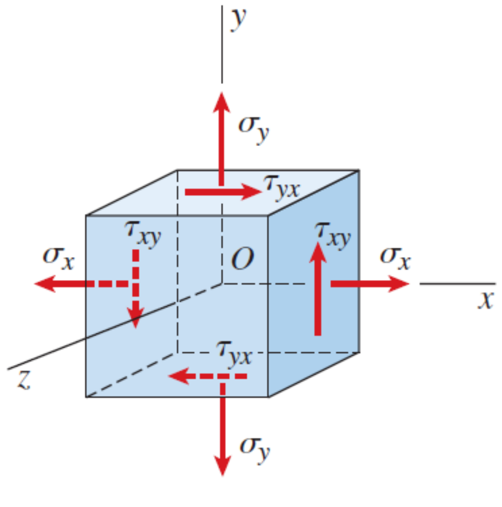
- 이 값은 주응력을 이용하여 구할 수도 있다. ➔ $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

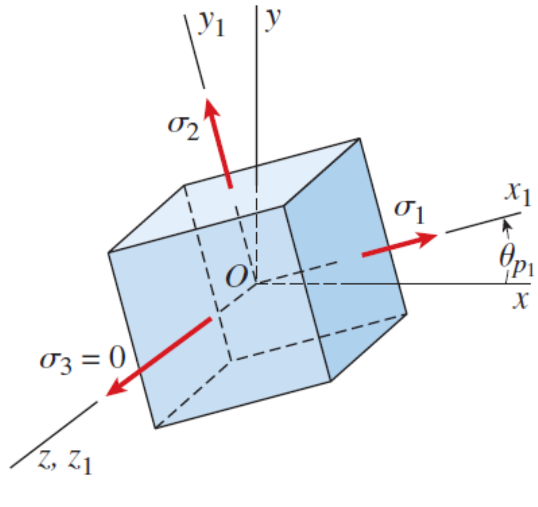
최대 전단 평면에서의 수직 응력은 $\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = \sigma_{aver} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

- 단축 응력, 2축 응력 ➔ 최대 전단응력평면은 $x - y$ 평면과 45^o 위치에서 발생

- 순수전단의 경우 ➔ 최대 전단응력은 $x - y$ 평면에서 발생

◆ 평면 내와 평면 외의 전단응력





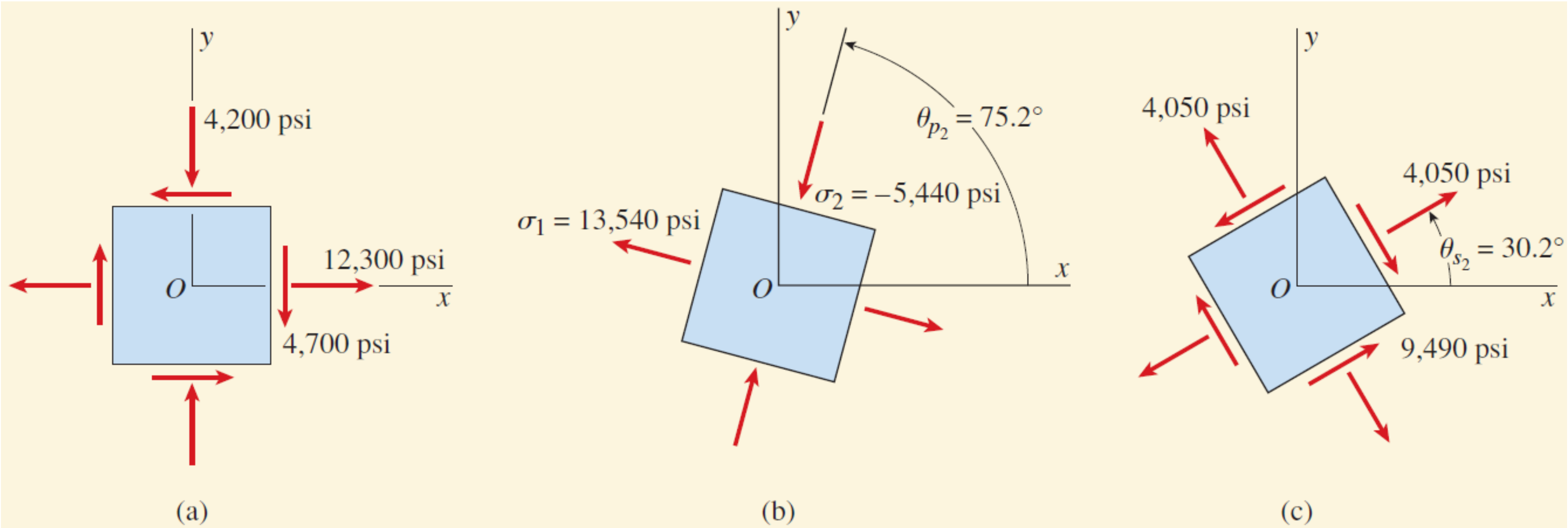
– 최대 전단응력은 $x-y-z$ 축 각각을 회전시켜서 구할 수 있다. 즉 3가지 경우가 존재함.

$$(\tau_{\max})_{x1} = \pm\frac{\sigma_2}{2} \qquad (\tau_{\max})_{y1} = \pm\frac{\sigma_1}{2} \qquad (\tau_{\max})_{z1} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

x_1, y_1 축에 대해 회전하여 구한 전단응력 ➔ **평면 외 전단응력**

– σ_1 , σ_2 의 크기와 부호에 따라 실제 최대 전단응력이 결정됨.

◆ 예제 7-3



문제

$$\sigma_x = 12,300 \text{ psi}\ ,\quad \sigma_y = -4,200 \text{ psi}\ ,\quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -4,700 \text{ psi}$$

(a) 주응력을 구하고 회전된 (회전각을 정확히 표시) 응력요소에 표시하기

(b) 최대 전단응력을 구하고 회전된 (회전각을 정확히 표시) 응력요소에 표시하기

풀이

(a) 먼저 주각 θ_p 를 구하면, $\tan 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \dfrac{2(-4,700)}{12,300-(-4,200)} = -0.5679$

$\rightarrow$ $2\theta_p = 150.3^o,\ 330.3^o$ $\rightarrow$ $\theta_p = 75.2^o,\ 165.2^o$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{12,300-4,200}{2} = 4,050 \text{ psi}, \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{12,300+4,200}{2} = 8,250 \text{ psi}$$

(해 1) 평면응력 변환공식 에 대입하여 구함.

$$\sigma_{x1} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = -5,440 \text{ psi} \quad \leftarrow \quad \theta_p = 75.2^o \text{ 일 경우}$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta = 13,540 \text{ psi} \quad \leftarrow \quad \theta_p = 165.2^o \text{ 일 경우}$$

(해 2) 주응력 구하는 일반식에 대입하여 구함

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 4,050 \pm 9,490 = 13,540 \text{ and } -5,440 \quad \leftarrow$$

– σ_1 의 방향을 결정하기 위하여, $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} = \frac{8,250}{9,490} = 0.869 \text{ , } \sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R} = \frac{-4,700}{9,490} = -0.495$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 330.3^o \rightarrow \theta_p = 165.2^o$$

(b) 최대전단응력은 유도된 공식을 이용함

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(8,250)^2 + (-4,700)^2} = 9,490 \text{ psi}$$ ←

$$\theta_{s1} = \theta_{p1} - 45^o = 165.2^o - 45^o = 120.2^o$$ ←

$$\theta_{s2} = \theta_{s1} - 90^o = 120.2^o - 90^o = 30.2^o$$

이때 축응력의 값은 $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_{aver} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 4,050 \text{ psi}$ ←